

Exemple / Exercice (12.44)

$$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_3} \right\} \rightsquigarrow W = \text{Vect} \{ \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \} \leftarrow \begin{matrix} B \text{ base} \\ \text{de} \\ W \end{matrix}$$

Construire une BD de W via GS. (et BON aussi)

→ voir le résultat dans les notes.

Dans cette séance on verra:

03.12

- (i) la décomposition QR d'une matrice $\leftarrow$ application de GS
- (ii) la méthode des moindres carrés $\rightarrow$ 3 façons de calculer

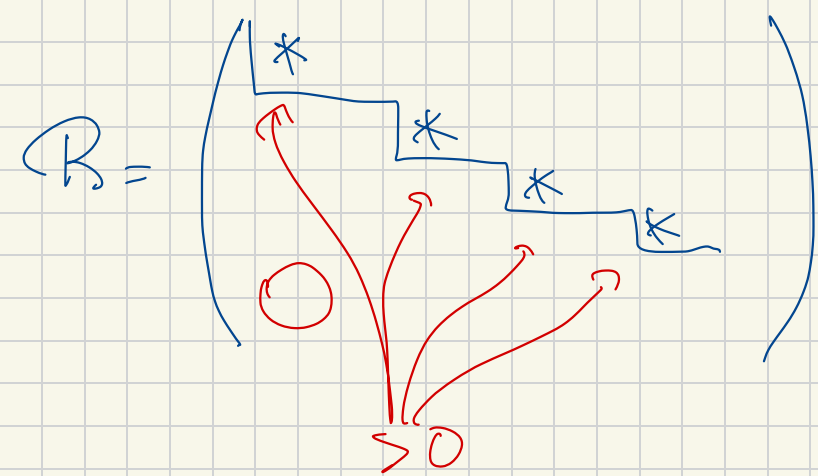
§ Décomposition QR (section 12.8 des notes de Sach2)

But

é.d. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
(avec $\text{rang}(A) = n$)

$\xrightarrow{\text{on veut}}$

- $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ t.q. $Q^T Q = \underline{I_n}$
- $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ triangulaire sup. t.q. le premier coeff.



non nul de chaque ligne non nulle est positif.

t.g. $A = Q \cdot R$

Def. 14.3 Une matrice $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si

$$Q^T \cdot Q = I_n$$

Fait $[\bar{q}_1 \dots \bar{q}_n] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est orthogonale ss $\{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n\}$ est orthonormée.

On définit, é.d. $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rang n ,

(*) $Q := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n]$ où $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ est BON
obtenue de $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ par GS.

$$R := Q^T \cdot A$$

Thm 12.45 Les deux matrices dans (*) satisfont

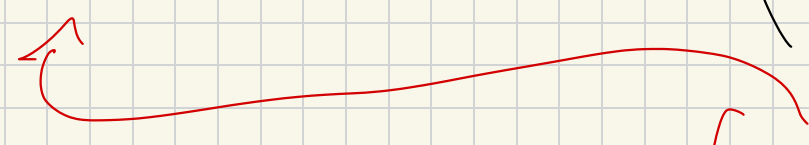
- Q est orthogonale
- R est triangulaire sup dont le premier coeff. non nul de chaque ligne non nulle est positif.

- $A = Q \cdot R$

Les matrices Q et R qui satisfont $\geq$ ces conditions sont uniques.

Exemple / Exercice 12.46 On veut calculer la décomposition

QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow[\text{BON}]{\text{GS}} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{4}/6 \\ \sqrt{4}/6 \\ 2\sqrt{4}/3 \end{pmatrix} \right\} ? \longrightarrow Q := \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{4}/6 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{4}/6 \\ 0 & 2\sqrt{4}/3 \end{pmatrix}$$


$$\begin{cases} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{3 \\ 2}}}{\underbrace{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2}_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Norm $\rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B := Q^T \cdot A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \square$$

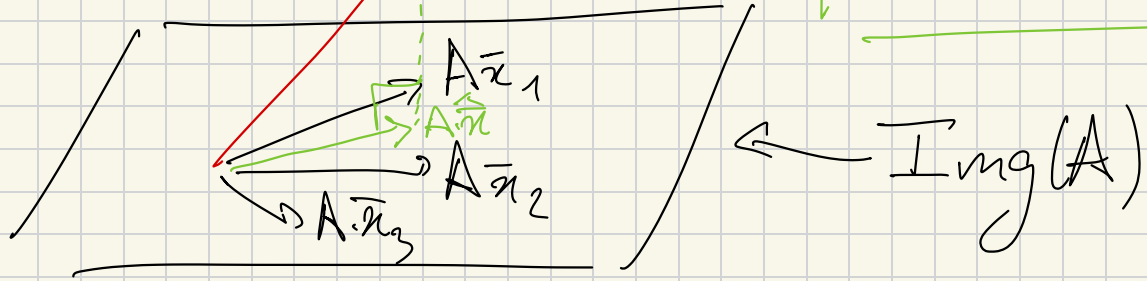
Chapitre 13 : Méthode des moindres carrés

Motivation Souvent on veut résoudre $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ mais il est incompatible

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \bar{b} \in \mathbb{R}^m$

Qu'est-ce qu'on fait? $\rightarrow$ On veut calculer le $\hat{\bar{x}}$ le plus proche d'être une sol. de $(*)$:

$$\|A\hat{x} - b\| \leq \|A\bar{x} - b\| \text{ pour tout } \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$



Déf. 13.3] Pour un SFL (*) $A\bar{x} = \bar{b}$, une pseudo-solution de (*) ou une solution de (*) au sens des moindres carrés (MC) est un vecteur $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

(MC) $\|A\hat{x} - b\| \leq \|A\bar{x} - b\|$ par tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\|A\hat{x} - b\|^2 \leq \|A\bar{x} - b\|^2$$

$$\sum_{j=1}^m ((A\hat{x})_j - b_j)^2 \leq \sum_{j=1}^m ((A\bar{x})_j - b_j)^2$$

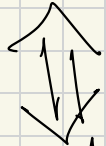
moindres carrés

Méthodes pour calculer la sol. au sens des MC

Méthode 1

$\hat{x}$ est sol. de (*) au sens de MC

$\hat{x}$ est sol. de



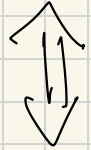
$$A \cdot \bar{x} = \text{pr}_{\text{Im}(A)}(b)$$

compatible !!

pas trop utile par les calculs !!

Méthode 2

$\hat{x}$ est sol. de (*) au sens de MC



(Thm 13.6)

$\hat{x}$ est sol. de

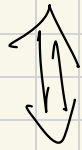
$$A^T \cdot A \cdot \bar{x} = A^T \cdot b$$

(équation normale)

compatible !!

Méthode 3

$\hat{x}$ est sol. de (*) au sens de MC



(Thm 13.11)

$\hat{x}$ est sol. de

$$R \cdot \bar{x} = Q^T \cdot b$$

compatible !!

$\leftarrow A = Q \cdot R$
décomp. QR

Exemple / Exercice 13.7

Trouver une sol de

avec EN :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 1 \\ 65 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 52 \\ 147 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

zusens des MC.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4373 & 79 \\ 79 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4373 & 79 \\ 79 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6878} \begin{pmatrix} 3 & -79 \\ -79 & 4373 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6313}{3439} \\ \frac{96268}{3439} \end{pmatrix}$$

Exemple / Exercice 13.13

Calculer la sol. zusens des MC de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \text{ avec m\u00e9thode 3}$$

$$\begin{cases} Q = [\bar{u}_1, \bar{u}_2] \\ R := Q^T A \end{cases}$$

BDN à partir de GS sur $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

→ voir les solutions dans les notes
manuscrites